Exercice 1 : .... *5 points*

1. La valeur acquise par un capital de 125000 F placé à intérêt composé au taux trimestriel de 3,5% pendant 12 ans.

Méthode 1 :

$C_n = C_0(1+t)^n$; $C_0 = 125\ 000F$; $t = 3,5\%$; $n = 12 \times 4 = 48$ trimestres ; car on a 4 trimestres par an.

$C_{48} = 125\ 000(1+0,035)^{48} = 651\ 698,62F$; $C_{48} = \mathbf{651\ 698,62}\boldsymbol{F}$

Méthode 2 :

$i_t = 0,035$

$(1+i_a) = (1+i_t)^4 \Rightarrow i_a = (1+i_t)^4 - 1 \Rightarrow i_a = (1,035)^4 - 1 \Rightarrow i_a = 0,147523$

$C_{12} = 125000(1,147523)^{12} = \mathbf{651\ 698,62}\ \boldsymbol{F}$

1,5 pt

2. Le taux auquel on doit placer un capital de 250 000 F pour obtenir pendant 6 ans 9 mois une valeur acquise de 420291,259 F

On a :un intérêt composé :

$$C_n = C_0(1+t)^n \Rightarrow t = \sqrt[n]{\frac{C_n}{C_0}} - 1 = \left(\frac{C_n}{C_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1,$$

$C_n = 420291,259$; $C_0 = 250\ 000$; $n = 6$ ans 9 mois $= 6,75$ ans

$$t = \left(\frac{420\ 291,259}{250\ 000}\right)^{\frac{1}{6,75}} - 1 = 0,0799 \approx 8\%\ ;\ \boldsymbol{t = 8\%}$$

1,5 pt

3. On considère deux placements à intérêts composés annuellement, l'un de 30000 F à 9% et l'autre de 70000 F à 5%.

Calculons le temps au bout duquel ils auront la même valeur acquise puis déterminons cette valeur acquise

$C_{n_1} = C_1(1+t_1)^{n_1} = 30\ 000(1,09)^n$; $C_{n_2} = C_2(1+t_2)^{n_2} = 70\ 000(1,05)^n$

$$C_{n_1} = C_{n_2} \Leftrightarrow 30\ 000(1,09)^n = 70\ 000(1,05)^n \Leftrightarrow \left(\frac{1,09}{1,05}\right)^n = \frac{7}{3} \Rightarrow n = \frac{\ln\frac{7}{3}}{\ln\frac{1,09}{1,05}} = 22,662578$$

$\boldsymbol{n = 22,662578 = 22ans\ 7mois\ 28\ jours}$

$\boldsymbol{C_{n_1} = C_{n_2} = 70\ 000(1,05)^{22,662578} = 211\ 496,012F}$

2 pts

Exercice 2 : .... *6 points*

Le Delta Central est une zone d'agriculture par excellence. Une invasion de criquets pèlerins a attiré l'attention de la Direction de la Protection des Végétaux (DPV). A cet effet la (DPV) a mis un système en place qui permet de diminuer chaque jour la surface infestée de 8%. Cette dernière était au départ de 2000 hectares.

1. a. Estimons les surfaces infestées restantes au premier jour et au deuxième jour.

Soit I_n la surface infestée restante au n-ième jour

$I_0 = 2000$ hectares

$I_1 = I_0 - 8\% I_0 = (1-8\%)I_0 = 0{,}92 I_0 = 0{,}92(2000) = 1840$; $\boldsymbol{I_1 = 1840}$ *ha* 1,5 pt

$I_2 = I_1 - 8\% I_1 = (1-8\%)I_1 = 0{,}92 I_1 = 0{,}92(1840) = 1692{,}8$; $\boldsymbol{I_2 = 1692{,}8}$ *ha*

b. Calculons le nombre de jours nécessaires pour traiter la moitié de la surface infestée.

$I_1 = 0{,}92 I_0$; $I_2 = 0{,}92 I_1$; $I_{n+1} = 0{,}92 I_n$; $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = 0{,}92$ et de premier terme $I_0 = 2000$. Son terme général est :

$I_n = I_0(q)^n = 2000(0{,}92)^n$.

Le calcul du nombre de jours nécessaires pour traiter la moitié de la surface infestée,revient à déterminer n tel que: $I_n \leq \frac{1}{2} I_0 \iff I_n \leq 1000$.

$I_n \leq 1000 \iff 2000(0{,}92)^n \leq 1000 \Longrightarrow (0{,}92)^n \leq 0{,}5 \Longrightarrow n \geq \frac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}92} \geq 8{,}31 \Longrightarrow \boldsymbol{n = 9.}$

Il faut 9 jours pour traiter la moitié de la surface infestée. 1 pt

2. Pour faire face à l'urgence la DPV a utilisé des pesticides de haute qualité pour la lutte. Ainsi elle a utilisé le premier jour de lutte 1000 litres de pesticides et décide d'ajouter chaque jour 400 litres de plus que le jour précédent.

a. Calculons les quantités de pesticides utilisées respectivement au deuxième jour et au troisième jour de lutte.

Soit P_n la quantité de pesticides utilisées respectivement au n-ième jour

$P_1 = 1000$;

$P_2 = P_1 + 400 = 1\,000 + 400 = 1\,400$; $\boldsymbol{P_2 = 1\,400}$ 1,5 pt

$P_3 = P_2 + 400 = 1\,400 + 400 = 1\,800$; $\boldsymbol{P_3 = 1\,800}$

b. La quantité de pesticide utilisée après 20 jours de traitements.

$P_2 = P_1 + 400$; $P_3 = P_2 + 400$; $P_{n+1} = P_n + 400$; $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r = 400$ et de premier terme $P_1 = 1000$. Son terme général est $P_n = P_1 + (n-1)r = 1\ 000 + 400(n-1) = 600 + 400n$. La somme des termes est donnée par $S_n = \frac{n}{2}(P_1 + P_n) = \frac{n}{2}(1000 + 600 + 400n) = 200n^2 + 800n$.

$n = 20$ jours, $S_{20} = 200(20)^2 + 800(20) = 96\,000$. 1 pt

Après 20 jours de traitements, la quantité de pesticide utilisée est 96 000 litres.

c. La somme dépensée en pesticide durant les 20 jours de lutte, sachant que le litre de pesticide coûte 18000 F.

Dépense = 96 000 × 18 000 = 1 728 000 000*F* 1 pt

Problème : .... *9 points* ✍

A. La société SIDI-SOLAR produit et distribue l'énergie à partir d'une installation de panneaux. Elle désire étudier la satisfaction journalière à partir d'une fonction de satisfaction définie sur $[1, 30]$ par : $f(t) = 0{,}02t^3 - 1{,}4t^2 + 22t + 640$ kilowatts où t

désigne la durée en jour de consommation.

On appelle f', la fonction dérivée de la fonction f comme fonction « Besoin ». On dit qu' il y a « Besoin » si f' est positive, sinon il y a « Rejet ».

1. La consommation d'un client en kilowatt du 1er juin au 21 juin

Proposition 1 :

$$C=\int_1^{21} f(t)\,dt=\int_1^{21}\left(0{,}02t^3-1{,}4t^2+22t+640\right)dt=\left[0{,}005t^4-1{,}4\frac{t^3}{3}+11t^2+640t\right]_1^{21}$$

$$=\left(0{,}005(21)^4-1{,}4\frac{(21)^3}{3}+11(21)^2+640(21)\right)-\left(0{,}005(1)^4-1{,}4\frac{(1)^3}{3}+11(1)^2+640(1)\right)$$

$$=\frac{42\,873{,}2}{3}=14\,291{,}067$$

pt

Ce client aura consommé 14 291,067 Kw.

Proposition 2 :

$$f(21)=0{,}02(21)^3-1{,}4(21)^2+22(21)+640=669{,}82\ ;\qquad f(21)=669{,}82$$

Ce client aura consommé 669,82 Kw.

2. Détermine les intervalles de besoin et de rejet.

$$f(t)=0{,}02t^3-1{,}4t^2+22t+640\Longrightarrow f'(t)=0{,}06t^2-2{,}8t+22$$

$$f'(t)=0\Longrightarrow 0{,}06t^2-2{,}8t+22=0\ ;\qquad \Delta=(-2{,}8)^2-4(0{,}06)(22)=2{,}56\ ;$$

$$t_1=\frac{2{,}8-1{,}6}{0{,}12}=10\ ;\qquad t_2=\frac{2{,}8+1{,}6}{0{,}12}=\frac{4{,}4}{0{,}12}=\frac{110}{3}=36{,}667\notin[1,30]\ ;$$

Tableau de signe :

t	1		10		30
$f'(t)$		+	0	−	

$\forall\, t\in[1,10[,\ f'(t)>0$

$\forall\, t\in[10,30],\ f'(t)\leq 0$

1,5 pt

L'intervalle de besoin est $[1, 10[$ et celui du rejet besoin est $[10, 30]$.

3. On désigne par $S=\int_{10}^{15} f(t)\,dt$ l'aire de la zone éclairée par pendant la nuit.

Déterminons, en cm^2 puis en m^2, cette aire.

$$S=\int_{10}^{15} f(t)\,dt=\int_{10}^{15}\left(0{,}02t^3-1{,}4t^2+22t+640\right)dt=\left[0{,}005t^4-1{,}4\frac{t^3}{3}+11t^2+640t\right]_{10}^{15}$$

$$=\left(0{,}005(15)^4-1{,}4\frac{(15)^3}{3}+11(15)^2+640(15)\right)-\left(0{,}005(10)^4-1{,}4\frac{(10)^3}{3}+11(10)^2+640(10)\right)$$

$$S=\frac{11\,009{,}375}{3}=3\,669{,}79167\ U.A\ \text{(unité d'aire)}$$

1,5pt

Supposons que l'unité d'aire est le centimètre carré

On sait que $1\text{cm}^2 = 10^{-4} m^2$, on a donc :

$$\boldsymbol{S = \frac{11\,009{,}375}{3}\text{cm}^2 = \frac{11\,009{,}375}{3} \times 10^{-4} m^2 = \frac{11\,009{,}375}{30\,000} = 0,\,366979167\ m^2}$$

B. Dans une grande ville, 78 000 personnes sont inscrites sur les listes électorales.
Lors d'une élection, 57 % des personnes inscrites se sont abstenues et 90 % des personnes qui ont voté (votants) se sont exprimées (suffrages exprimés) .
Le candidat favori est en tête avec exactement 54 % des suffrages exprimés.

a. Calculons de deux manières différentes la proportion des suffrages exprimés parmi la totalité des inscrits.
Soit t_{SEI} ce pourcentage

Manière 1 :

57 % des inscrits se sont abstenues, $\Rightarrow 100\% - 57\% = 43\%$ des inscrits ont votés.
90 % des votants se sont exprimées $\Rightarrow t_{SEI} = 90\%(43\%) = 38{,}7\%$.

1,5 pt

Manière 2 :

Nombre d'inscrit : 78 000 personnes
Pourcentage de personnes inscrites qui se sont abstenues : 57%
Nombre de personnes inscrites qui se sont abstenues : $57\%(78\,000) = 44\,460$
Nombre de votants : $78\,000 - 44\,460 = 33\,540$
Pourcentage de suffrages exprimés : 90%
Nombre de suffrages exprimés : $90\%(33\,540) = 30\,186$

$$\boldsymbol{t_{SEI} = \frac{\text{Nombre de suffrages exprimés}}{\text{Nombre d'inscrit}} \times 100 = \frac{30\,186}{78\,000} \times 100 = 38{,}7\%.}$$

1,5 pt

b. Calculons la proportion, en pourcentage, de bulletins pour le candidat favori parmi les votants, puis parmi les inscrits.
Proportion en pourcentage de bulletins pour le candidat favori parmi les votants :
Soit t_{FV}, cette proportion.
$t_{FV} = 54\%(90\%) = 48{,}6\%$; $\boldsymbol{t_{FV} = 48{,}6\%}$

1 pt

Proportion en pourcentage, de bulletins pour le candidat favori parmi les inscrits :
Soit t_{FI}, cette proportion.
$t_{FI} = 54\%(t_{SEI}) = 54\%(38{,}7\%) = 20{,}898\%$; $\boldsymbol{t_{FI} = 20{,}898\%}$

1pt